www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES Durée : 5 heures

Introduction et notations

L'objet du problème est l'étude de certaines équations intégrales du type :

$$\int_{-a}^{a} K(x-t)\,u(t)\,dt = f(x)$$

où a est un paramètre réel fixé strictement positif et u est l'inconnue. Cette étude sera appliquée, dans la troisième partie, à la résolution d'un problème aux limites en deux variables.

Toutes les fonctions considérées dans les parties I et II sont à valeurs complexes et, dans la partie III, à valeurs réelles. Les parties I et II sont indépendantes; les questions 1° et 2° de la partie III sont indépendantes des parties I et II.

On rappelle que l'ensemble $C^0([-a,a],\mathbb{C})$ des fonctions continues sur $[-a,a]$, à valeurs complexes, est un espace vectoriel préhilbertien complexe pour le produit scalaire hermitien :

$$(u\,|\,v) = \int_{-a}^{a} \overline{u(t)}\,v(t)\,dt$$

On note δ_{ij} le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$

$\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Certaines indications spécifiquement utiles dans une partie du problème y seront définies et placées entre carrés : ▪....▪.

PARTIE I

Equation intégrale en dimension finie

1°- Etude d'un exemple - Soit $K_1(x) = \alpha + \beta x + \gamma e^x$, où α, β, γ sont trois nombres complexes, β et γ étant non nuls. On note F_1 (resp. G_1) le sous-espace vectoriel de $C^0([-a,a],\mathbb{C})$ engendré par $\{1, x, e^x\}$ (resp. $\{1, x, e^{-x}\}$).

a) Montrer que F_1 et G_1 sont de dimension 3.

b) Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ des fonctions $\varphi(a) = a\,ch(a) - sh(a)$ et $\psi(a) = sh(a) - a\,ch(a) + \frac{a^2}{3}\,sh(a)$.

c) Montrer que le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{a^3}{3} & -sh(a) + a\,ch(a) \\ a & 0 & sh(a) \\ sh(a) & sh(a) - a\,ch(a) & sh(a)\,ch(a) \end{vmatrix}$$

n'est pas nul pour a strictement positif.

d) Pour tout $u \in C^0([-a,a],\mathbb{C})$, on pose $\Phi_1[u](x) = \int_{-a}^{a} K_1(x-t)\,u(t)\,dt$. Montrer que $\Phi_1[u]$ appartient à F_1, et que pour tout $f \in F_1$, l'équation $\Phi_1[u] = f$ ádmet une unique solution dans G_1 que l'on appellera u_0. Montrer que u est solution de l'équation $\Phi_1[u] = f$ si et seulement si $u - u_0$ est orthogonal à G_1.

2°- Quelques lemmes - Soit M un sous-espace vectoriel de dimension finie $m \geq 2$ de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit l'élément δ_x du dual M^* de M par :

$$\forall u \in M,\ \delta_x(u) = u(x).$$

On pose $\Delta = \{\delta_x;\ x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que Δ est une partie génératrice de M^* (on pourra considérer l'orthogonal dans M du sous-espace vectoriel de M^* engendré par Δ).

b) Montrer qu'il existe $x_1,\ldots, x_m \in \mathbb{R}$ et $u_1,\ldots, u_m \in M$ tels que

$$\forall i,j \in \{1,\ldots,m\},\ u_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

c) Soit (v_n) une suite de fonctions appartenant à M, convergeant simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction v. Montrer que v appartient à M et que la suite (v_n) converge vers v uniformément sur tout segment $[-b, b]$ de $\mathbb{R}$.

▪ Pour toute fonction u définie sur $\mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}$, on note $(\tau_h u)(x) = u(x+h)$.

Soient $a > 0$ fixé et F_2 un sous-espace vectoriel de dimension finie $m \geq 2$ de l'espace $C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. On suppose que :

$$\forall u \in F_2, \forall h \in \mathbb{R},\ \tau_h u \in F_2.$$

Soit K_2 une fonction de F_2 non identiquement nulle sur $[-a, a]$. Pour toute fonction u définie et continue sur $[-a, a]$, on pose

$$\Phi_2[u](x) = \int_{-a}^{a} K_2(x-t)\,u(t)\,dt.▪$$

3°- a) Montrer que si u appartient à F_2, alors sa dérivée u' appartient à F_2. On pourra considérer la suite (v_n) définie par $v_n = n(\tau_{\frac{1}{n}} u - u)$. En déduire que tout $u \in F_2$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, si u est définie et continue sur $[-a, a]$, alors $\Phi_2[u]$ appartient à F_2. On pourra considérer une suite de sommes de Riemann.

Tournez la page S.V.P.

■ On suppose désormais que la suite $(K_2^{(n)})$ des dérivées successives de K_2 est une partie génératrice de F_2.■

4°- a) Montrer que $(K_2, K'_2, ..., K_2^{(m-1)})$ est une base de F_2.
En déduire que $(\tau_h K_2, \tau_h K'_2, ..., \tau_h K_2^{(m-1)})$ est une base de F_2 pour tout $h \in \mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il existe m fonctions $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_{m-1}$ déterminées de manière unique, définies sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad K_2(x-t) = \sum_{j=0}^{m-1} \varphi_j(t)\, K_2^{(j)}(x);$$

établir que $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_{m-1}$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser les éléments de la question 2°- b).

c) Montrer que la matrice A(t) suivante :

$$A(t) = \begin{bmatrix} \varphi_0(t) & \varphi_1(t) & \dots & \varphi_{m-1}(t) \\ \varphi'_0(t) & \varphi'_1(t) & \dots & \varphi'_{m-1}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_0^{(m-1)}(t) & \varphi_1^{(m-1)}(t) & \dots & \varphi_{m-1}^{(m-1)}(t) \end{bmatrix}$$

est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$. Que vaut A(0) ?

d) Montrer que $(\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_{m-1})$ est une famille libre.

5°- On appelle G_2 le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ engendré par $(\overline{\varphi}_0, \overline{\varphi}_1, ..., \overline{\varphi}_{m-1})$.

a) Montrer que l'application $\rho : G_2 \to C^0([-a, a], \mathbb{C})$ qui, à tout $u \in G_2$, associe sa restriction au segment $[-a, a]$, est injective (on pourra utiliser les éléments de la question 4°- c).

b) Montrer que le déterminant D ci-dessous n'est pas nul :

$$D = \begin{vmatrix} (\varphi_0|\varphi_0) & (\varphi_1|\varphi_0) & \dots & (\varphi_{m-1}|\varphi_0) \\ (\varphi_0|\varphi_1) & (\varphi_1|\varphi_1) & \dots & (\varphi_{m-1}|\varphi_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_0|\varphi_{m-1}) & (\varphi_1|\varphi_{m-1}) & \dots & (\varphi_{m-1}|\varphi_{m-1}) \end{vmatrix}$$

c) Soit H_2 l'image de G_2 par ρ. Montrer que la restriction Ψ_2 de Φ_2 à H_2 constitue une bijection de H_2 sur F_2. Lorsque f appartient à F_2, décrire l'ensemble des solutions de l'équation $\Phi_2[u] = f$ à l'aide de f, Ψ_2 et H_2.

PARTIE II

Equation intégrale pour des fonctions 2π - périodiques

■ On dit qu'une série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$ à termes complexes indexée sur $\mathbb{Z}$ est *absolument convergente* si les *deux* séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$ sont absolument convergentes; on appelle alors *somme* de cette série le nombre complexe :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \quad \text{que l'on notera} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n.$$

On désigne par P_0 (resp. P_∞) l'ensemble des fonctions définies et continues (resp. C^∞) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ admettant la période 2π. Pour tout $u \in P_0$, on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier complexes de u par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad u_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) e^{-int}\, dt. \blacksquare$$

On appelle *série de Fourier de* u la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n e^{inx}$; on note $S_u(x)$ sa somme quand cette série est convergente.

1°- A l'aide du théorème de Parseval, montrer que :

a) si $u \in P_0$, les suites (u_n) et (u_{-n}) convergent vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

b) deux fonctions de P_0 admettant les mêmes coefficients de Fourier sont égales.

2°- Déduire de la question 1°- b) que si la série de Fourier de $u \in P_0$ est absolument convergente, alors sa somme $S_u(x)$ est égale à u(x) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

■ Soit $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n$ une série absolument convergente à termes complexes telle que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ c_n \neq 0.$$

On note $K_3(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ et, pour tout $u \in P_0$, on pose :

$$\Phi_3[u](x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_3(x-t)\, u(t)\, dt. \blacksquare$$

3°- a) Montrer que K_3 appartient à P_0. En déduire que $\Phi_3[u]$ appartient à P_0 pour tout $u \in P_0$.

.../...

page 84
1990 2/4 E.N.S. de LYON
Opt.Sc.Phys.-

b) En intégrant terme à terme la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in(x-t)} u(t)$ sur $[-\pi,\pi]$, exprimer les coefficients de Fourier de $\Phi_3[u]$ en fonction de ceux de u. En déduire que pour tout $u \in P_0$, $\Phi_3[u]$ est somme de sa série de Fourier en tout point de $\mathbb{R}$.

c) Montrer que Φ_3 définit une application de P_0 dans P_0 injective mais non surjective (on pourra montrer que K_3 n'a pas d'antécédent dans P_0).

4°- a) Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(i) $u \in P_\infty$;

(ii) $\forall k \in \mathbb{N}$, $n^k u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $n^k u_{-n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

b) On suppose qu'il existe $\alpha>0$ et $C>0$ tels que $|c_n| \geq \frac{C}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$.

Montrer que Φ_3 définit une application bijective de P_∞ dans P_∞.

5°- a) Soient $r \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin(nx)$ est convergente et calculer sa somme.

b) En déduire que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{\cos(nx)}{n} = -\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos(x)+r^2)$.

▪ On note S_0 (resp. S_1) l'ensemble des fonctions $u \in P_0$ telles que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ (resp. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n u_n$) soit absolument convergente. Soit $f \in S_1$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier. On pose, pour tout $r \in]0,1]$,

$$f_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n r^{|n|} e^{inx};$$

$$K_r(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos(x)+r^2) + \frac{1}{2}\ln 2,$$

et, pour tout $u \in S_0$, on pose $\Phi_r[u](x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_r(x-t)\,u(t)\,dt$. ▪

6°- a) Montrer que l'équation $\Phi_r[u] = f_r$ admet, pour tout $r \in]0,1[$, une unique solution u dans S_0 dont on calculera les coefficients de Fourier en fonction de ceux de f. Vérifier que u est indépendante de r.

b) Montrer que l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \ln|\sin(x-t)|\,dt$ est convergente pour tout $x \in [-\pi,\pi]$.

c) Etablir que, pour tout $r \in]0,1[$, on a, si $(x-t) \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$0 \leq -\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos(x-t)+r^2) \leq -\ln|\sin(x-t)|.$$

En déduire que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\alpha>0$ tel que, pour tout $r \in]0,1[$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$\left| \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \frac{1}{2}\ln(1-2r\cos(x-t)+r^2)\,u(t)\,dt \right| \leq \varepsilon.$$

d) Montrer que, pour tout $x \in [-\pi,\pi]$, $\Phi_r[u](x)$ tend vers $\Phi_1[u](x)$ quand r tend vers 1 par valeurs inférieures. En déduire que u est solution de l'équation $\Phi_1[u] = f$.

e) Montrer que Φ_1 est une application linéaire bijective de S_0 dans S_1, et que sa restriction à P_∞ est bijective de P_∞ dans P_∞.

PARTIE III

Un problème aux limites pour le laplacien

▪ Soit f une fonction donnée de classe C^2 sur $[-1,1]$ à valeurs réelles. On désigne par U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ complémentaire de $[-1,1] \times \{0\}$:

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \neq 0 \text{ ou } (y=0 \text{ et } x \notin [-1,1])\}.$$

On considère le problème suivant : trouver une fonction F définie et continue sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles, dont la restriction à U soit de classe C^2, telle que :

$$(1) \quad \begin{cases} \forall (x,y) \in U,\ \Delta F(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 0 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = F(x,-y) \\ \forall x \in [-1,1],\ F(x,0) = f(x). \end{cases} \text{▪}$$

1° - Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé et pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note $r = \sqrt{(t-x)^2+y^2}$.

a) Etablir que si, $\varphi(x,y) = \psi(r)$ où ψ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, alors on a, pour tout $(x,y) \neq (t,0)$ (c'est-à-dire $r \neq 0$),

$$\Delta\varphi(x,y) = \psi''(r) + \frac{1}{r}\psi'(r).$$

Tournez la page S.V.P.

b) Trouver toutes les fonctions ψ de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs réelles, telles que la fonction $\varphi(x,y)=\psi(r)$ vérifie

$$\forall (x,y)\neq(t,0),\ \Delta\varphi(x,y)=0.$$

2°- Soit u une fonction continue sur $[-1,1]$, à valeurs réelles. On pose, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$F(x,y)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\ln\left[(x-t)^2+y^2\right]u(t)\,dt.$$

a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que F est de classe C^2 dans U et que $\Delta F=0$ dans U.

c) Soient $x_0\in\,]-1,1[$ et $\alpha_0\in\,]0,\frac{1}{3}[$ tels que $]x_0-\alpha_0,x_0+\alpha_0[\subset\,]-1,1[$. Montrer que pour tout $\varepsilon>0$, on peut choisir $\alpha\in\,]0,\alpha_0[$ tel que :

$$\forall (x,y)\in U,\ |x-x_0|<\frac{1}{3},\ |y|<\frac{1}{3},\ \left|\int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha}\frac{1}{2}\ln\left[(x-t)^2+y^2\right]u(t)\,dt\right|\leq\varepsilon.$$

On pourra commencer par établir que, sous les conditions précédentes, on a :

$$\forall t\in[x_0-\alpha,x_0+\alpha],\ 0\geq\ln\left[(x-t)^2+y^2\right]\geq\ln\left[(x-t)^2\right].$$

d) Déduire de la question 2°- c) que F est continue en $(x_0,0)$ pour tout $x_0\in[-1,1]$.

e) Montrer que F est solution du problème (1) si u est solution de l'équation

$$(2)\qquad \forall x\in[-1,1],\ \int_{-1}^{1}\ln|x-t|\,u(t)\,dt=f(x).$$

3°- a) Montrer que résoudre le problème (2) équivaut à trouver une fonction v paire de période 2π telle que :

$$(3)\qquad \forall\theta\in[-\pi,\pi],\ \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\ln 2+\ln\left|\sin\left(\frac{\theta-\tau}{2}\right)\right|\right)v(\tau)\,d\tau=g(\theta),$$

où $g(\theta)=f(\cos(\theta))$. On pourra utiliser la relation suivante valable pour toute fonction h d'intégrale convergente sur $[-\pi,\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}h(\tau)\,d\tau=\int_{0}^{\pi}\left(h(\tau)+h(-\tau)\right)d\tau.$$

Expliciter l'application T telle que $Tu=v$ et sa réciproque T^{-1}.

b) A l'aide de la question II - 6°- e), montrer que si f est de classe C^3 sur $[-1,1]$, alors l'équation (3) admet une unique solution v dans l'espace S_0 définie dans la partie II.

▪ On admettra que les résultats précédents s'étendent au cas où u est une fonction continue sur $]-1,1[$ telle que la fonction $t\mapsto u(t)\sqrt{1-t^2}$ ait une limite finie quand t tend vers 1 et quand t tend vers -1.▪

4°- a) Résoudre l'équation suivante en u_0 :

$$\forall x\in[-1,1],\ \int_{-1}^{1}\ln|x-t|\,u_0(t)\,dt=1.$$

b) Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, soit T_p l'unique polynôme à coefficients réels tel que, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on ait $T_p(\cos(\theta))=\cos(p\theta)$. Résoudre l'équation suivante en u_p :

$$\forall x\in[-1,1],\ \int_{-1}^{1}\ln|x-t|\,u_p(t)\,dt=T_p(x).$$

5°- Soit $\alpha\in\,]0,\pi/2[$ un réel fixé.

a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $Q(z)=\dfrac{-2z\cos(\alpha)}{z^2\sin(\alpha)-2z+\sin(\alpha)}$ et en déduire que :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \frac{\cos(\alpha)}{1-\cos(\theta)\sin(\alpha)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}tg^{|n|}\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{in\theta}.$$

b) Résoudre l'équation suivante en u :

$$\forall x\in[-1,1],\ \int_{-1}^{1}\ln|x-t|\,u(t)\,dt=\frac{\cos(\alpha)}{1-x\sin(\alpha)}.$$

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail